

Abb. 5. Der 0-0-Übergang im 21,218 eV-Photoelektronenspektrum von  $H_2$ , verglichen mit der optimal angepaßten theoretischen Kurve für  $V=0,2$ .

<sup>9</sup> L. ÅSBRINK, private Mitteilung von E. LINDHOLM, Vortrag auf der EUCHEM Research Conference on Electron Spectroscopy, Uppsala, September 1970.

malen Anpassung nur die übrigen drei Parameter variiert wurden.

Ein Versuch, die Anpassung der theoretischen Kurven durch Hinzunahme eines Beitrages mit  $\Delta N = \pm 1$  zu verbessern, ergab in Übereinstimmung mit den Argumenten von SICHEL<sup>1</sup> keinen Beitrag.

ÅSBRINK<sup>9a</sup> hat das Photoelektronenspektrum von  $H_2$  mit Neon-Resonanzlicht (16,671 eV und 16,848 eV) und einem Kugelkondensator untersucht. Da die von der thermischen Bewegung der  $H_2$ -Moleküle herrührende Verschmierung der Elektronenergie proportional ist ( $E_{el}$ )<sup>1/2</sup>, also für Ne-Licht um einen Faktor 2 und mehr kleiner als für He-Licht, konnte er die Rotationsstruktur besser auflösen. Åsbrink konnte einen kleinen Beitrag der  $\Delta N = \pm 2$ -Übergänge nachweisen.

<sup>9a</sup> L. ÅSBRINK, Chem. Phys. Lett. **7**, 549 [1970].

## Untersuchung der Wendelininstabilität an einem wandstabilisierten Wasserstoffbogen\*

JÜRGEN MENTEL

Elektrophysikalisches Institut der Technischen Hochschule München \*\*

(Z. Naturforsch. **26 a**, 526—538 [1971]; eingegangen am 7. Dezember 1970)

The formation of a steady helical instability in a wall-stabilized hydrogen arc at low currents is investigated experimentally. To determine the onset-point of the instability theoretically the basic equations of electrodynamics and the balance of mass, momentum and energy are solved in the limiting case of vanishing growth-rate of the instability, taking into account the dissipative terms as well as the temperature dependence of the density. It turns out that the destabilizing  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -forces, which try to deflect the arc by a convective heat-transfer, are balanced by the thermal stabilization of the tube-wall as well as by the unsymmetrical energy-production in the curved arc. Onset-point and pitch of the helix result from the theory in full agreement with the measurements.

### 1. Einleitung

Die untersuchte Instabilität wurde zuerst am freibrennenden Hochstrom-Kohlebogen beobachtet, dessen Säule sich oberhalb einer Grenzstromstärke in eine Helix mit einer oder auch mehreren Windungen verformt, die um ihre Achse rotiert. Diese Erscheinung wird als Wendeln bezeichnet. GUILLERY<sup>1</sup>

und WITKOWSKI<sup>2</sup> untersuchten experimentell das Wendeln sehr eingehend und unternahmen ebenso wie FINKELNBURG<sup>3</sup> im wesentlichen qualitative Erklärungsversuche.

An wandstabilisierten Bögen tritt für genügend große Gefäßradien die gleiche Instabilität auf<sup>3-5</sup>, doch unter wesentlich definierteren Verhältnissen, da der Einfluß der Konvektion auf die Entladung

\* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigten Dissertation. Tag der Promotion: 31. 7. 1969.

\*\* Jetzige Adresse: Siemens AG, Forschungslaboratorium, Erlangen, Günther-Scharowsky-Straße 2.

<sup>1</sup> P. GUILLERYS Untersuchungen werden referiert in: W. FINKELNBURG, Hochstromkohlebogen, Springer-Verlag, Berlin 1948.

<sup>2</sup> S. WITKOWSKI, Z. Angew. Phys. **11**, 135 [1959].

<sup>3</sup> H. MOTSCHMANN, Z. Physik **191**, 10 [1966].

<sup>4</sup> K. BEHRINGER, W. KOLLMAR u. J. MENTEL, Z. Physik **215**, 127 [1968].

<sup>5</sup> M. DREUSICKE u. W. NEUMANN, Beitr. Plasmaphys. **6**, 175 [1966].



vermindert ist und die Randbedingungen eindeutig bestimmt sind. Vor allem verschwindet im Falle einer symmetrischen Elektrodenanordnung, die außerdem beide Bogenenden fixiert, bei sorgfältiger Justierung die Rotation der instabilen Säule<sup>4</sup>.

STEINBERGER<sup>6</sup> brannte in einer Kaskadenkammer von 5 mm  $\varnothing$  einen instabilen H<sub>2</sub>-Bogen, der durch zwei stabile Teilbögen in 2 mm  $\varnothing$  Kaskaden von den Elektroden getrennt war. Er konnte dadurch zeigen, daß es sich bei der Bogeninstabilität um einen Säulen-Effekt handelt. Den ersten Versuch einer theoretischen Behandlung der Instabilität, und zwar für den Sonderfall eines Poiseuille-Bogens mit axialem Strömung und axialem Magnetfeld unternahm YUEN<sup>7</sup> in Anlehnung an die Stabilitätstheorie für den Z-Pinch<sup>8</sup>.

Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit an einem wandstabilisierten, zylindrischen Bogen ohne Fremdmagnetfeld und ohne äußere Strömung verfolgen zunächst das Ziel, für einen exemplarischen Fall genaue experimentelle Ergebnisse über die Entstehung und Ausbildung der Instabilität zu gewinnen. Ein Wasserstoffbogen bei Atmosphärendruck, der in einem Rohr von 18 mm  $\varnothing$  brennt, erreicht die Stabilitätsgrenze bei einem Leistungsumsatz von 1 kW/cm. Der Bogen mit den angegebenen Betriebsdaten läßt sich in einem transparenten, wassergekühlten Quarzrohr betreiben, so daß man die Entstehung und Entwicklung der Instabilität ungestört beobachten kann. Außerdem sind für Wasserstoff die Materialeigenschaften bekannt, die für eine Berechnung der Instabilität benötigt werden. Diese erfolgt auf der Grundlage einer linearen, zeitunabhängigen Störungstheorie, aus der man den Einsatzpunkt der Instabilität und in diesem die Ganghöhe erhält. Ein Vergleich der theoretischen mit den experimentellen Ergebnissen für den speziell untersuchten Fall wird schließlich zeigen, inwieweit die Theorie und die Vorstellungen, die ihr zu Grunde liegen, richtig sind.

## 2. Experiment

Die Untersuchungen werden an einem stationären Wasserstoffbogen niederer Stromstärke bei Atmosphärendruck ausgeführt, wie er bereits früher<sup>4</sup> ausführlich beschrieben wurde. Das Bogengefäß besteht aus einem doppelwandigen, wassergekühlten Quarzrohr

von 18,3 mm  $\varnothing$ , das an den Enden von ebenfalls wassergekühlten Elektrodenhalterungen aus Messing abgeschlossen wird. In diesem Gefäß brennt der Bogen mit einer Länge von 40 cm zwischen angespitzten Wolframelektroden, die sich während des Versuches rund 10 mm tief in elektrisch isolierte, wassergekühlte Kupfertuben mit einem Innendurchmesser von 9 mm versenken lassen. Dadurch wird der Gefäßradius an den Enden auf die Hälfte reduziert und die Säule vor den Elektroden stabilisiert. Außerdem ist durch die Länge der Entladung sichergestellt, daß der größte Teil der Bogensäule frei von Elektrodeneinflüssen ist. Während der Messungen strömt kein Gas durch das Entladungsgefäß.

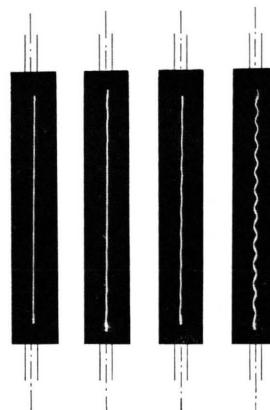


Abb. 1. Aufnahmen von einem 40 cm langen H<sub>2</sub>-Bogen in einem Quarzrohr von 18,3 mm  $\varnothing$  mit eingezzeichnete Rohrwand.  $p=1$  atm. Von links nach rechts: gerader, stabiler Bogen;  $I=9,5$  A. An beiden Enden gestörter Bogen;  $I=10,2$  A. Bogen im Einsatzpunkt der Instabilität;  $I=10,35$  A. Stehende Bogenhelix bei 10,7 A.

Unterhalb 10 A brennt der Bogen bei guter Justierung der Anordnung als rötlicher Faden völlig gerade und zylindersymmetrisch, wie die 1. Aufnahme in Abb. 1 zeigt. Bei Vergrößerung des Bogenstromes um Beträge von 0,1 A bilden sich, wie man auf der 2. Aufnahme sieht, an den Enden kleine, mit dem Strom stetig wachsende Störungen der Zylindersymmetrie aus. Diese nehmen die Form kleiner Schraubenlinien an, deren Amplituden von den Enden her in axialer Richtung abklingen. Die Störungen werden ausgelöst von den Übergangsstellen Tubus – Quarzrohr, während die Säule selbst noch stabil ist.

Bei weiterer Steigerung der Stromstärke wird schließlich die gesamte Säule von der wendelförmigen Störung ohne erkennbare Dämpfung in Achsenrichtung erfaßt. Diese Phase der Entwicklung gibt die 3. Aufnahme in Abb. 1 wieder. Die destabilisierenden Effekte sind offenbar gerade auf die gleiche Größe wie die stabilisierenden Einflüsse angewachsen, so daß jetzt erst die eigentliche Stabilitätsgrenze des geraden Bogens er-

<sup>6</sup> S. STEINBERGER, Z. Physik **223**, 1 [1969].

<sup>7</sup> MAN CHUEN YUEN, Phys. Fluids **9**, 1140 [1966].

<sup>8</sup> M. KRUSKAL u. M. SCHWARZSCHILD, Proc. Roy. Soc. London A **223**, 348 [1954].

reicht wird. Dies ist allerdings nur für kleine äußere Störungen richtig. Bei einem Gefäßdurchmesser von 18,3 mm findet man für die in der angegebenen Form definierte Einsatzstromstärke der Instabilität ( $10,35 \pm 0,15$  A) mit einer Ganghöhe im Einsatzpunkt von ( $35,5 \pm 1,0$ ) mm.

Erhöht man den Bogenstrom über den Wendeleinsatzpunkt hinaus, so nimmt die Amplitude der Helix, wie die 4. Aufnahme in Abb. 1 zeigt, gleichmäßig auf der ganzen Bogenlänge mit dem Strom zu und wird unabhängig von der äußeren Störung. Dabei zieht sich die Wendel mit wachsendem Strom zusammen. Die Abhängigkeit der Ganghöhe vom Strom ist in Abb. 7 am Ende der Arbeit wiedergegeben, wo sie mit theoretischen Ergebnissen verglichen wird.

### 3. Voraussetzung für die theoretische Untersuchung

#### 3.1. Physikalischer Ausgangspunkt

Die Bogenlage wird in erster Linie durch die Energiebilanz bestimmt<sup>9–11</sup>. Deshalb soll zunächst an ihrer integralen Form qualitativ diskutiert werden, wie das Zusammenspiel der einzelnen Bilanzglieder in der gewendeten Konfiguration zu einem stationären Zustand führt.

Dazu schneidet man aus der verschraubten Entladung durch zwei ebene Schnitte senkrecht zur Bogenachse ein gekrümmtes Bogenstück heraus. Als Mantelfläche  $M$  des Entladungskanals wird eine Isothermenfläche der Temperatur  $T_M$  gewählt und der Kanal durch einen Achsenschnitt  $S$  senkrecht zur Hauptnormalen in einen inneren, achsennahen Bereich 1 und einen äußeren, wandnahen Bereich 2 mit den Teilmantelflächen  $M_1$  und  $M_2$  zerlegt. Der Index 0 bezeichnet die Größen der zylindersymmetrischen Entladung gleicher Stromstärke. Aus der Anwendung des Energiesatzes auf die Bereiche  $\nu = 1,2$  erhält man, indem man für die ohmsche Heizung  $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau = -\mu_0^{-1} \oint \mathbf{E} \times \mathbf{B} d\mathbf{f}$  schreibt:

$$-\int_{M_1+S} \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} d\mathbf{f} + \int_{M_2} (\approx \text{grad } T - \mu_0^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\mathbf{f} + \int_S \mathbf{v} \cdot \text{grad } p d\tau = 0. \quad (1)$$

Den geringen Beitrag des Druckgradienten kann man, wie in 3.2 gezeigt wird, vernachlässigen. Die entgegengesetzten gleichen Integrale über die Deckelflächen wurden weggelassen und auf dem Achsenschnitt  $S$  die Terme  $\text{grad } T d\mathbf{f} = 0$  und  $\mathbf{E} \times \mathbf{B} d\mathbf{f} = 0$

<sup>9</sup> J. RAEDER, Z. Naturforsch. **23a**, 424 [1968].

<sup>10</sup> K. SAUTER, Z. Naturforsch. **24a**, 1694 [1969].

<sup>11</sup> N. NATHRATH, Z. Naturforsch. **25a**, 1609 [1970].

gesetzt, was näherungsweise richtig ist. Die Flächenvektoren  $d\mathbf{f}$  zeigen, wie üblich, aus dem betrachteten Volumen heraus.

Aus der Krümmung des Bogens folgt  $E_1 > E_0 > E_2$ ,  $B_1 > B_0 > B_2$  und daraus auf der Mantelfläche auch  $|\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1| > |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0| > |\mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2|$ . Außerdem ist aufgrund der unsymmetrischen Bogenlage zur gekühlten Wand im allgemeinen  $|\text{grad}_1 T| < |\text{grad}_0 T| < |\text{grad}_2 T|$ . Hinzu kommt, daß der äußere Teil auch wegen seiner größeren Mantelfläche ( $M_2 > M_1$ ) stärker als der innere gekühlt wird.

Da auf der Mantelfläche näherungsweise  $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \uparrow \uparrow \text{grad } T$  gilt, ergibt sich mit  $\approx \text{grad}_0 T - \mu_0^{-1} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 = 0$  folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} & (\approx \text{grad}_1 T - \mu_0^{-1} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1) d\mathbf{f}_1 \\ & > (\approx \text{grad}_0 T - \mu_0^{-1} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0) d\mathbf{f}_0 = 0 \quad (2) \\ & > (\approx \text{grad}_2 T - \mu_0^{-1} \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2) d\mathbf{f}_2. \end{aligned}$$

Die Bilanz zwischen elektrischer Energiezufuhr und Wärmeableitung  $\int_{M_\nu} (\approx \text{grad } T - \mu_0^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\mathbf{f}$  ist daher für die äußere Bogenhälfte negativ und für die innere positiv.

Den Bilanzausgleich ermöglicht der konvektive Wärmetransport. Die eigenmagnetischen  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kräfte des verschraubten Bogens pumpen das Gas durch die Entladung in Richtung der Auslenkung hindurch, und zwar mit um so größeren Massendurchsatz, je höher der Bogenstrom ist<sup>12, 13</sup>.

Aus

$$\oint_M h \varrho \mathbf{v} d\mathbf{f} = h(T_M) \oint_M \varrho \mathbf{v} d\mathbf{f} = 0; \quad (\partial h / \partial T)_p > 0$$

und

$$\begin{aligned} - \int_S h \varrho \mathbf{v} d\mathbf{f}_2 & > - h(T_M) \int_S \varrho \mathbf{v} d\mathbf{f}_2 \\ & = h(T_M) \int_{M_2} \varrho \mathbf{v} d\mathbf{f} \end{aligned}$$

resultiert, daß die Strömung der äußeren Bogenhälfte auf Kosten der inneren Wärme zuführt. Während also ohmsche Heizung und Wärmeleitung die Temperatur auf der Innenseite des Bogens erhöhen und diesen zurück zur Achse treiben würden, sucht der konvektive Wärmetransport die konvexe Außenseite aufzuheizen und damit die Helix aufzuweiten.

Aus der folgenden Rechnung soll nun der Einsatzpunkt und in dessen Umgebung die Ganghöhe

<sup>12</sup> H. ROSENBAUER, Dissertation, Technische Universität München 1970.

<sup>13</sup> G. SEEGER, Z. Angew. Phys. **25**, 23 [1968].

der Instabilität bestimmt werden. Dazu wird der Entladungskanal des geraden Bogens zu einer Helix mit der Ganghöhe  $\lambda$  und der zeitlich konstanten Amplitude  $\varepsilon$  verbogen und die Lösung für die verschraubte Konfiguration in einer linearen Störungsrechnung ermittelt. Den Störparameter  $\varepsilon$  hat man dazu hinreichend klein zu wählen.

Derartige Lösungen, in denen sich die oben aufgeführten Beiträge zur Energiebilanz kompensieren, lassen sich in einer zeitunabhängigen Rechnung, z. B. für bestimmte Stromstärken und Ganghöhen finden. Oberhalb einer solchen Grenzstromstärke  $I_0(\lambda)$  überwiegt der destabilisierende Konvektionsterm, was zu einem Anwachsen der linearen Störung führt, und unterhalb gewinnen die rücktreibenden dissipativen Glieder die Oberhand, so daß kein gewendelter Bogen dieser Ganghöhe möglich ist.  $I_0$  stellt daher die Stabilitätsgrenze für die ( $m = 1$ )-Instabilität der Ganghöhe  $\lambda$  dar. Der kleinste Wert von  $I_0$  ist dann die Einsatzstromstärke der Instabilität und das entsprechende  $\lambda$  die Ganghöhe im Einsatzpunkt.

### 3.2. Grundgleichungen und Annahmen

In die Berechnung für den gewendeten Bogen gehen außer der Energiebilanz folgende Gleichungen für den stationären Fall ein: die Maxwell-Gleichungen und das Ohmsche Gesetz, die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls und die Zustandsgleichung des Bogengases. Dabei soll vorausgesetzt werden, daß sich das Plasma für die Lösung des Problems hinreichend genau durch das Einflußgittersmodell beschreiben läßt.

In dem Gleichungssystem sind einige Vereinfachungen möglich. So ergibt eine Abschätzung der magnetischen Reynolds-Zahl  $R_{\text{em}} = \sigma |\mathbf{v}| \mu_0 L$  aus den Bogendaten<sup>4</sup> und einer charakteristischen Strömungsgeschwindigkeit von  $v = 30 \text{ cm/sec}$ <sup>12</sup>, daß der  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ -Term im Ohmschen Gesetz im Vergleich zum Gradientenfeld  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$  keine Rolle spielt ( $R_{\text{em}} \ll 10^{-5}$ ).

Da der ungestörte Bogen strömungsfrei ist, stellt die Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  eine reine Störgröße dar. Der Term für die konvektive Beschleunigung  $\varrho(\mathbf{v} \text{ grad})\mathbf{v}$  in der Impulsbilanz ist daher ein quadratisches Störglied und läßt sich streichen. Außerdem soll für die Viskosität  $\eta$  ein konstanter Mittelwert benutzt werden.

Die vom Pincheffekt hervorgerufenen relativen Druckunterschiede im Entladungsgefäß sind kleiner als  $10^{-4}$ , so daß man weder die Druckabhängigkeit

der Dichte und der übrigen Materialeigenschaften noch den Term  $\mathbf{v} \text{ grad } p$  in der auf die Enthalpie  $h$  umgeschriebenen Energiegleichung zu berücksichtigen braucht. Weiterhin erweist es sich wie in der Theorie der zylindrischen Bögen als vorteilhaft, die Wärmeleitfähigkeit  $\alpha$  aus der Energiegleichung zu eliminieren, indem man statt der Temperatur  $T$  das Wärmestrompotential  $S = \int_0^T \alpha dT$  als unabhängige Zustandsvariable einführt. Der Ausdruck für den konvektiven Wärmetransport  $\varrho_M \mathbf{v} \text{ grad } h$  läßt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung auf die Form  $(\partial h / \partial (1/\varrho_M))_p \text{ div } \mathbf{v}$  bringen. Die Größe  $(\partial h / \partial (1/\varrho_M))_p$ , die in einem idealen Gas den Wert  $5/2 p$  annimmt, soll in der Rechnung durch einen geeigneten Mittelwert angenähert werden.

Schließlich kann man die reziproke Dichte bis  $10^4 \text{ }^\circ\text{K}$  mit geringem Fehler durch eine lineare  $S$ -Abhängigkeit approximieren, woraus sich die spezielle Form der benutzten Zustandsgleichung ergibt.

Aus dem  $S$ -abhängigen Verlauf der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$ <sup>14</sup> erkennt man, daß diese unterhalb eines Einsatzpunktes praktisch Null ist. Dadurch ist in der Entladung eine Grenzfläche definiert, auf der die elektrische Leitfähigkeit einsetzt. Zur Erleichterung der Rechnung soll der Bogen durch einen stromführenden Kanal konstanter elektrischer Leitfähigkeit beschrieben werden.

Aufgrund der Vereinfachungen ergibt sich schließlich folgende Form für das Gleichungssystem:

$$\mathbf{j} = -\sigma \text{ grad } V, \quad (3)$$

$$\Delta V = 0, \quad (4)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\text{div } \varrho_M \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \text{grad } p - \eta \text{ rot rot } \mathbf{v} + 4/3 \eta \text{ grad div } \mathbf{v} = 0, \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial (1/\varrho_M)}{\partial h} \right)_p \text{ div } \mathbf{v} = \Delta S + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}, \quad (9)$$

$$\varrho_M = a/(S + S_c). \quad (10)$$

### 3.3. Bestimmung des Bogenkanals

Die radialen  $\sigma$ - und  $S$ -Verteilungen der ungestörten Entladung, aus denen der Bogenkanal bestimmt werden soll, bekommt man aus einer iterativen

<sup>14</sup> U. PLANTIKOW, Z. Physik **227**, 271 [1969].

Lösung der Energiegleichung des zylindrischen Bogens:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d} r \frac{dS}{dr} + \sigma(S) E^2 = 0. \quad (11)$$

Sie wird z. B. in <sup>14</sup> beschrieben. Die Materialfunktion  $\sigma(S)$ , die man dafür benötigt, läßt sich aus den Angaben über  $\sigma$  und  $\alpha$  in <sup>4</sup> ermitteln. Außerdem hat man zu berücksichtigen, daß wegen der hohen elektrischen Feldstärke im Niederstrombogen die Elektronentemperatur  $T_e$  merklich über der Gastemperatur  $T_g$  liegt, wodurch die elektrische Leitfähigkeit auf dem Weg über  $T_e$  außer von  $S$  bzw.  $T_g$  auch von  $E$  abhängig wird (siehe <sup>4</sup>). Dieser Feldstärke-abhängigkeit hat man durch einen weiteren Iterationsprozeß Rechnung zu tragen. Eine untere Grenze für den Kanalradius erhält man aus dem integralen Leitwert  $G$ , indem man für die konstante Leitfähigkeit  $\sigma_0$  im Kanal den Achsenwert  $\sigma_A$  verwendet; eine sichere obere Grenze ist der Radius bei dem  $\sigma$  auf 5% des Achsenwertes abgefallen ist. Schließlich erreicht man eine vernünftige Approximation für den Kanalradius, indem man nach einem Vorschlag von MAECKER <sup>15</sup> die mittlere quadratische Abweichung zwischen wahrer  $\sigma$ -Verteilung und Kanalmodell minimalisiert, also den Kanalradius unter der Nebenbedingung  $G = \sigma_0 r_0^2 \pi = \text{const}$  aus:

$$\frac{d}{dr_0} \left[ \int_0^{r_0} (\sigma - \sigma_0)^2 r dr + \int_{r_0}^R \sigma^2 r dr \right] = 0 \quad (12)$$

bestimmt. Wie die Rechnung zeigt, findet man  $r_0$  in einer  $(r^2 - \sigma)$ -Ebene als Abszisse des Schnittes zwischen der  $\sigma(r^2)$ -Kurve und einer Parallelen zur  $r^2$ -Achse, welche die Fläche unter dem  $\sigma(r^2)$ -Verlauf halbiert. Mit Hilfe der berechneten  $S(r)$ - bzw.  $T(r)$ -Verteilungen läßt sich schließlich die Ortsabhängigkeit von  $\eta$  und  $(\partial h / \partial (1/\varrho_M))_p$  in der erforderlichen nullten Näherung bestimmen. Die Viskosität  $\eta$ , für die theoretische Werte von GRIER <sup>16</sup> verwendet wurden, ergibt sich als weitgehend konstant in der Entladung. Die ebenfalls konstant gesetzte Größe  $(\partial h / \partial (1/\varrho_M))_p$ , zu deren Berechnung die in <sup>17</sup> angegebenen Enthalpiewerte herangezogen wurden, erhält man aus einer mit  $|\operatorname{div} \mathbf{v}|$  gewichteten Mittlung über den Gefäßquerschnitt.

<sup>15</sup> H. MAECKER, private Mitteilung.

<sup>16</sup> N. T. GRIER, NASA Technical Note TND 3186.

### 3.4. Störansatz

Um den Bogen in die gestörte, helikale Form zu bringen, wird seine Achse zu einer Schraubenlinie mit der Ganghöhe  $\lambda$  und dem Radius  $\varepsilon$  verwunden. Außerdem werden die kreisförmigen Bogenquerschnitte in eine Lage überführt, in der sie auch von der neuen helikalnen Achse im Mittelpunkt senkrecht durchstoßen werden.

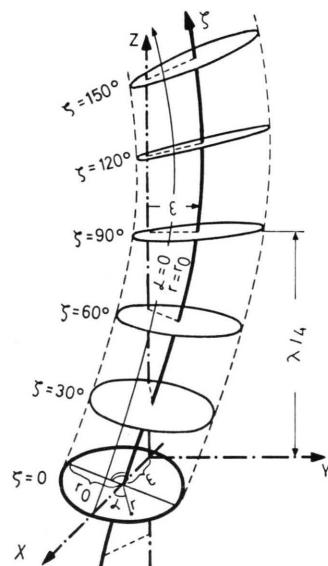


Abb. 2. Orthogonales, gewendeltes Koordinatensystem, bestehend aus einer  $\zeta$ -Achse, die von einer Helix der Amplitude  $\varepsilon$  und der Ganghöhe  $\lambda$  gebildet wird, und in dazu senkrechten Ebenen Polarkoordinaten  $r, \alpha$  um die  $\zeta$ -Achse herum.

Vor allem um die Randbedingungen bei der Lösung des Gleichungssystems zu vereinfachen, wird ein orthogonales Koordinatensystem eingeführt, für das die gekrümmte Grenzfläche des Bogenkanals eine Koordinatenfläche ist. Dieses System ist in Abb. 2 dargestellt. Sie enthält eine  $\zeta$ -Achse, die von der verschraubten Bogenachse der Amplitude  $\varepsilon$  gebildet wird, und orthogonale Ebenen zu dieser Achse, die  $\zeta = \text{const}$ -Flächen. Nullpunkt des Koordinatensystems ist der rechtwinklige Schnitt der  $\zeta$ -Achse mit der  $x$ -Achse des kartesischen Koordinatensystems für den ungestörten Bogen. Der Maßstab der  $\zeta$ -Koordinate soll so gewählt werden, daß sich deren Wert bei einem vollen Umlauf auf der Helix um  $2\pi$  ändert.

<sup>17</sup> F. BURHORN u. R. WIENECKE, Z. Phys. Chem. **215**, 258 [1960].

In den  $\zeta = \text{const}$ -Flächen werden ebene Polarkoordinaten  $(r, \alpha)$  eingeführt, die im Durchstoßpunkt der  $\zeta$ -Achse zentriert sind. Außerdem wird der  $\alpha = 0$ -Zeiger so orientiert, daß die Auslenkrichtung der Helix bei  $\alpha = \zeta$  liegt. Wie man auch aus Abb. 2 ersieht, behält dann die  $\alpha = 0$ -Richtung für veränderliches  $\zeta$  näherungsweise ihre Orientierung in  $x$ -Richtung bei. Das System ist einschließlich der Glieder  $O(\varepsilon)$  orthogonal.

Aus der obigen Beschreibung ergibt sich mit  $k = 2\pi/\lambda$  bei Vernachlässigung der Glieder  $O(\varepsilon^2)$  folgender Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \cos \zeta + r \cos \alpha, \\ y &= \varepsilon \sin \zeta + r \sin \alpha, \\ z &= \zeta/k - r \sin(\alpha - \zeta) \varepsilon k. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Grenzfläche des leitfähigen Kanals liegt in den gewendelten Koordinaten bei  $r_0$ , das den gleichen Zahlenwert wie der Radius des ungestörten Bogenkanals hat. Mit den Gl. (13) kann man leicht zeigen, daß die Grenzfläche mit dem in Zylinderkoordinaten  $(r_z, \varphi, z)$  üblichen zeitunabhängigen Störansatz  $r_z = r_0 + \text{Re} \exp i(\varphi - kz)$  übernimmt.

Aus Gl. (13) lassen sich weiterhin die Linienelemente in Richtung der neuen Koordinaten bestimmen, die man zur Aufstellung der partiellen Differentialgleichungen benötigt.

$$\begin{aligned} ds_r &= dr, & ds_a &= r d\alpha, \\ ds_\zeta &= [1 + \varepsilon k r k \cos(\alpha - \zeta)] d\zeta/k. \end{aligned} \quad (14)$$

Schreibt man die Gl. (3) – (10) explizit in den neuen Koordinaten an, so wird zunächst über  $ds_\zeta$  der Störparameter  $\varepsilon k$  in die Koeffizienten eingeführt. In die Gleichungen setzt man dann, wie üblich, jeweils eine Summe aus einer Grundlösung und einer  $\varepsilon k$  proportionalen Störung  $A_0 + \varepsilon k A_1$  ein und entwickelt die Gleichungen bis zu linearen Gliedern in  $\varepsilon k$ . So ergibt z. B.:

$$\begin{aligned} \text{grad}_\zeta(A_0 + \varepsilon k A_1) &= k \frac{\partial A_0}{\partial \zeta} + \varepsilon k \\ &\cdot \left[ k \frac{\partial A_1}{\partial \zeta} - \cos(\alpha - \zeta) r k^2 \frac{\partial A_0}{\partial \zeta} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Anteile nullter Ordnung werden durch die Lösungen  $A_0$  befriedigt, die sich aus den bekannten Resultaten für den ungestörten Bogen mit konstantem  $\sigma$  im Kanal ergeben, indem man die Zylinderkoordinaten durch  $r, \alpha, \zeta/k$  ersetzt. Als Glieder 1. Ordnung findet man für die Störterme  $A_1$  par-

tielle Differentialgleichungen, die wegen des Störparameters  $\varepsilon k$  in den Ausgangsgleichungen ebenfalls von  $A_0$  abhängen. Die Störgrößen setzen sich, wie aus den Grenzbedingungen bei  $r_0$  folgt, aus einem periodischen Anteil  $\cos(\alpha - \zeta)$  und einem Amplitudenfaktor, der nur von  $r$  abhängt, zusammen. Dadurch ergibt sich schließlich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

## 4. Lösung des Gleichungssystems

### 4.1. Grundriß der Lösung

Aufgrund der Vereinfachungen, die sich aus den besonderen Bedingungen der Bogenentladung ergeben, müssen die Gleichungen nicht simultan, sondern können nacheinander gelöst werden. Man beginnt mit der Berechnung der Stromdichtevertteilung  $\mathbf{j} = -\sigma \text{grad } V$  in dem gewendelten Leiter, indem man die Lösung der Potentialgleichung  $\Delta V = 0$  sucht. Mit der bekannten Stromdichtevertteilung im leitfähigen Kanal kann dann aus  $\Delta \mathbf{B} = 0$  und rot  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  das gestörte Magnetfeld berechnet und daraus schließlich der Störterm der  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kraft in der Impulsbilanz bestimmt werden. Daraufhin lassen sich die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit aus der Impulsbilanz unter Berücksichtigung der Kontinuitäts- und der Zustandsgleichung gewinnen. Über die Kontinuitätsgleichung geht allerdings die Massendichte und damit die zu diesem Zeitpunkt noch unbekannte Verteilung des Wärmestrompotentials in die Berechnung ein. Da jedoch in der Kontinuitätsgleichung die Massendichte mit der Störgröße  $\mathbf{v}$  multipliziert ist, benötigt man an dieser Stelle nur die bereits bekannte Grundlösung  $S_0$ . Mit der Berechnung der Strömung sind die inhomogenen Glieder  $(\partial h / \partial(1/\rho_M))_p \text{div } \mathbf{v}$  und  $\mathbf{j}^2 / \sigma$  in der Energiegleichung (9) bekannt, so daß sich auch die Störung des Wärmestrompotentials bestimmen läßt.

### 4.2. Vereinbarungen

Die Rechnung wird mit Größen, die in folgender Form normiert sind, durchgeführt:

$$\begin{aligned} r^* &= r R^{-1}, & k^* &= k R, \\ V^* &= V k \sigma_0 j_0^{-1}, & j^* &= j j_0^{-1}, \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{B} k \mu_0^{-1} j_0^{-1}, & \mathbf{v}^* &= \mathbf{v} \eta k^3 \mu_0^{-1} j_0^{-2}, \\ p^* &= p k^2 \mu_0^{-1} j_0^{-1}, & S^* &= S L^{-1}, \\ \text{grad}^* &= k^{-1} \text{grad}, \text{div}^* = k^{-1} \text{div}, \\ \text{rot}^* &= k^{-1} \text{rot}, & \Delta^* &= k^{-2} \Delta, \end{aligned} \quad (16)$$

$R$  = Gefäßradius,  $j_0$  = Stromdichte im ungestörten Bogen,  $L$  = im ungestörten Bogen pro Längeneinheit umgesetzte Leistung. Die Normierung für eine Reihe von Hilfsvariablen folgt aus den in Gl. (16) angegebenen. Da bis zum Ende des Abschnittes 4 nur normierte Größen vorkommen, unterbleibt ihre Kennzeichnung im weiteren Verlauf.

Die Amplituden der Störgrößen werden durch ein Dach markiert ( $\hat{A}$ ). Die Indizes „a“ und „i“ unterscheiden, soweit nötig, die Größen außerhalb und innerhalb des leitfähigen Kanals ( $A^a, A^i$ ). Bei den Grenzbedingungen wird von der Schreibweise  $A^a(r_0) - A^i(r_0) = [A]$  Gebrauch gemacht. Außerdem führt man folgende neue Bezeichnungen ein:

$$\varrho = r k, \quad \delta = \varepsilon k.$$

Die Differentialgleichung der modifizierten Bessel-Funktionen  $I_1(\varrho)$  und  $K_1(\varrho)$  wird in abgekürzter Form wiedergegeben:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \varrho \frac{dF}{d\varrho} - \left( 1 + \frac{1}{\varrho^2} \right) F = D_B F. \quad (17)$$

Schließlich sind die ohne Argument geschriebenen modifizierten Bessel-Funktionen an der Stelle  $\varrho_0 = r_0 k$  zu nehmen.

#### 4.3. Berechnung der Stromdichte $\mathbf{j}$ , des Magnetfeldes $\mathbf{B}$ und der Lorentz-Kraft $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$

Das elektrische Potential und die Stromverteilung im leitfähigen Kanal lassen sich aus Gl. (3) und (4) nach dem in 3.4 beschriebenen Verfahren berechnen.

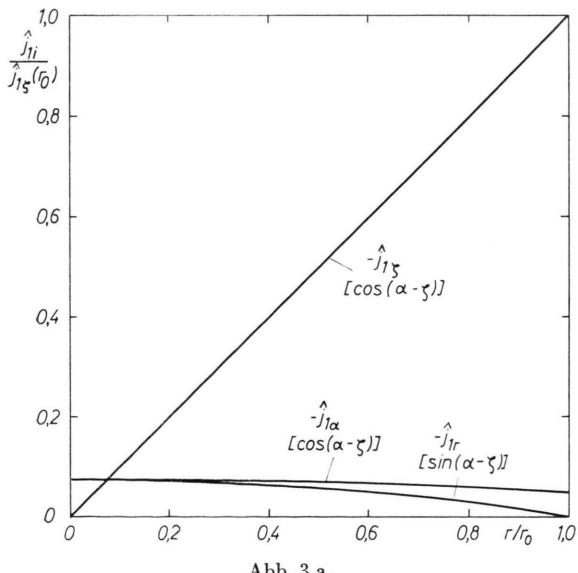


Abb. 3 a.

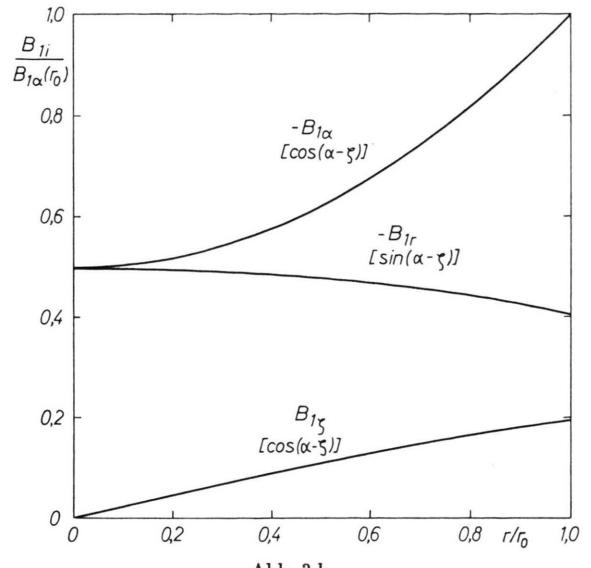


Abb. 3 b.

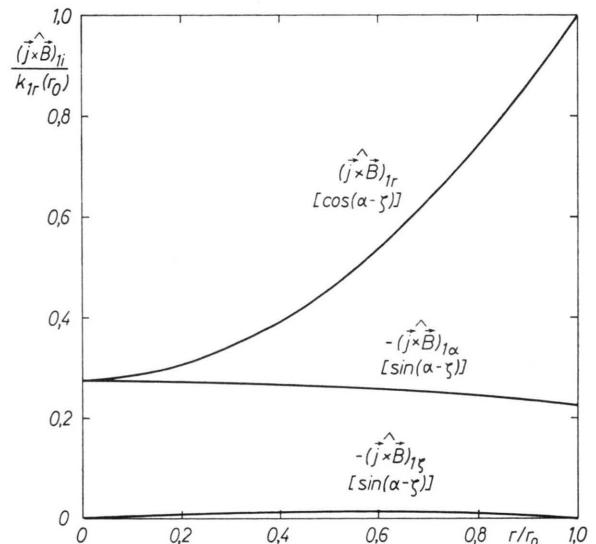


Abb. 3 c.

Abb. 3. Amplituden der elektrischen Störgrößen in einem gewendelten Leiter mit  $r_0 = 1$  mm,  $\lambda/(2\pi) = k^{-1} = 5$  mm.  
a) Elektr. Stromdichte  $\mathbf{j}_1$ , normiert auf  $\hat{j}_{1z}(r_0) = j_0 \cdot 1,96 \cdot 10^{-1}$ .  
b) Magnetfeld  $\mathbf{B}_1$ , normiert auf  $\hat{B}_{1a}(r_0) = \mu_0 j_0 k^{-1} \cdot 2,48 \cdot 10^{-2}$ .

c)  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kraft, normiert auf

$$K_{1r}(r_0) = (\mathbf{j}(r_0) \times \mathbf{B}(r_0))_{1r} = \mu_0 j_0^2 k^{-1} \cdot 4,45 \cdot 10^{-2}.$$

Unter der Bezeichnung der Störgrößen ist in Klammern jeweils deren Winkelabhängigkeit angegeben.

Mit der Randbedingung  $j_r(\varrho_0) = \partial V(\varrho_0) / \partial \varrho = 0$  erhält man für die Stromdichte:

$$\begin{aligned} j_r &= -\delta [1 - I_1'(\varrho) / I_1'] \sin(\alpha - \zeta), \\ j_a &= -\delta [1 - I_1(\varrho) / (I_1' \varrho)] \cos(\alpha - \zeta), \\ \mathbf{j}_z &= 1 - \delta I_1(\varrho) / I_1' \cos(\alpha - \zeta). \end{aligned} \quad (18)$$

Wie die Darstellung der Amplituden der Störstromdichte in Abb. 3 a zeigt, kommt der ausschlaggebende Beitrag von der  $\zeta$ -Komponente, die in dem gekrümmten Leiter die konstante Stromdichte  $j_0 \mathbf{e}_\zeta$  von innen nach außen stetig schwächt.

Um das Störmagnetfeld zu berechnen, hat man zunächst  $B_{1\zeta} = \hat{B}_{1\zeta} \cos(\alpha - \zeta)$  aus der  $\zeta$ -Komponente der Gl. (6) unter Berücksichtigung der Grundlösung  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_\alpha \varrho/2$  zu ermitteln:

$$D_B \hat{B}_{1\zeta} + \varrho/2 = 0, \quad (19)$$

$$\hat{B}_{1\zeta} = C_1 I_1(\varrho) + \varrho/2. \quad (20)$$

Die beiden anderen Komponenten erhält man aus  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$ .

$$B_{1a} = -\cos(\alpha - \zeta) [\hat{B}_{1\zeta}/\varrho + \hat{j}_{1r}], \quad (21)$$

$$B_{1r} = -\sin(\alpha - \zeta) [\hat{d}B_{1\zeta}/d\varrho + \hat{j}_{1a}]. \quad (22)$$

Um die Integrationskonstante  $C_1$  zu bestimmen, muß das Störmagnetfeld auch außerhalb des leitfähigen Kanals berechnet werden. Es läßt sich aus einem Potential herleiten, für das sich aus der Störungsrechnung nach 3.4 ergibt:

$$U_0 + \delta U_1 = -\alpha \varrho_0^2/2 + \delta \hat{U}_1 \sin(\alpha - \zeta), \quad (23)$$

$$\hat{U}_1 = C_2 K_1(\varrho) + \varrho_0^2/(2\varrho). \quad (24)$$

$C_1$  und  $C_2$  werden aus den Grenzbedingungen bei  $r_0$ :

$$[B_{1r}] = 0 \quad \text{und} \quad [B_{1a}] = 0 \quad (25)$$

ermittelt.

Als Ergebnis erhält man folgende Ausdrücke für das Magnetfeld:

$$B_{1r} = \sin(\alpha - \zeta) [1/2 + (I_1 K_1/I_1') I_1'(\varrho) - I_1(\varrho)/(\varrho I_1')],$$

$$B_{1a} = \cos(\alpha - \zeta) [1/2 + (I_1 K_1/I_1') I_1(\varrho)/\varrho - I_1'(\varrho)/I_1'], \quad (26)$$

$$B_{1\zeta} = \cos(\alpha - \zeta) [\varrho/2 - (I_1 K_1/I_1') I_1(\varrho)].$$

In Fig. 3 b sind die Amplituden des Störmagnetfeldes wiedergegeben. Dominierend ist die  $\alpha$ -Komponente, die wegen des Faktors  $\cos(\alpha - \zeta)$  in der äußeren Hälfte des gewendelten Leiters das symmetrische Grundmagnetfeld schwächt und es im inneren Teil verstärkt. Aus der Stromdichte- und Magnetfeldverteilung gewinnt man schließlich die  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kraft, indem man das Produkt bis zu den linearen Störtermen entwickelt. Nach Abb. 3 c liefert die  $r$ -Komponente den Hauptbeitrag zum  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Vektorfeld der Störung. Die  $r$ - und  $\alpha$ -Komponenten von

$\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  addieren sich zu einem Kraftfeld quer zum Bogen, dessen Vektoren im wesentlichen in Richtung der Auslenkung zeigen.

#### 4.4. Lösung des Strömungsproblems

Für die Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \delta [\hat{v}_{1r} \cos(\alpha - \zeta) \mathbf{e}_r + \hat{v}_{1a} \sin(\alpha - \zeta) \mathbf{e}_\alpha + \hat{v}_{1\zeta} \sin(\alpha - \zeta) \mathbf{e}_\zeta] \quad (27)$$

aus der Impulsbilanz benötigt man zunächst die Grundlösung für den Pinchdruck:

$$p_0^i = (\varrho_0^2 - \varrho^2)/4, \quad p_0^a = 0 \quad (28)$$

und für das Wärmestrompotential:

$$S_0^i = 1/(4\pi) [1 - \varrho^2/\varrho_0^2 - 2 \ln(\varrho_0/k)],$$

$$S_0^a = -1/(2\pi) \ln(\varrho/k). \quad (29 \text{ a, b})$$

Dann wird die Hilfsvariable

$$q = (4/3 \text{ div } \mathbf{v} - p) = q_0 + \hat{q}_1 \cos(\alpha - \zeta)$$

aus der Divergenz der Impulsbilanz:

$$\Delta q - \mathbf{j}^2 = 0 \quad (30)$$

nach der in 3.4 angegebenen Methode bestimmt. Das Ergebnis lautet:

$$q_1^i = A_1 I_1(\varrho) + \varrho/2 - \varrho I_1'(\varrho)/I_1', \quad (31)$$

$$q_1^a = A_2 I_1(\varrho) + A_3 K_1(\varrho). \quad (32)$$

Zur Berechnung der Wirbelstärke  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$  ( $\boldsymbol{\omega}$  ist die doppelte Winkelgeschwindigkeit), die man ebenfalls benötigt, wird die Rotation der Impulsbilanz gebildet:

$$\text{rot}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \text{rot rot } \boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \Delta \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (33)$$

Die  $\zeta$ -Komponente der Gleichung liefert  $\hat{\omega}_{1\zeta} \sin(\alpha - \zeta)$ , wobei wiederum 3 Integrationskonstanten  $A_4, A_5, A_6$  anfallen.

$\omega_{1a}$  bekommt man aus der  $r$ -Komponente der Impulsbilanz:

$$\omega_{1a} = \sin(\alpha - \zeta) [-\hat{\omega}_{1\zeta}/\varrho + \hat{d}q_1/d\varrho + (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{B}})_{1r}] \quad (34)$$

und ebenso  $\omega_{1r}$  aus der  $\alpha$ -Komponente.

Schließlich wird die Komponente  $v_{1\zeta}$  der Strömungsgeschwindigkeit bestimmt. Die beiden anderen Komponenten ergeben sich dann aus der bereits berechneten Wirbelstärke  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$  zu:

$$\hat{v}_{1r} = \hat{\omega}_{1a} + \hat{d}v_{1\zeta}/d\varrho,$$

$$\hat{v}_{1a} = \hat{\omega}_{1r} - \hat{v}_{1\zeta}/\varrho. \quad (35 \text{ a, b})$$

Man geht von folgender Form der Impulsbilanz aus:

$$0 = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \text{grad } q + A\mathbf{v} - \text{grad div } \mathbf{v}, \quad (36)$$

deren  $\zeta$ -Komponente die Gleichung für  $\hat{v}_{1\zeta}$  liefert:

$$0 = D_B \hat{v}_{1\zeta} + (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{B}})_{1\zeta} + \hat{q}_1 - \text{div } \hat{\mathbf{v}}_1. \quad (37)$$

Die unbekannte Größe  $\text{div } \mathbf{v}$  in Gl. (37) läßt sich über die Kontinuitäts- und die Zustandsgleichung (10) durch  $v_{1r}$  und  $S_0$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v}_1 &= -\mathbf{v}_1 \frac{d \ln \varrho_M}{dS} \text{grad } S \\ &= \frac{1}{S_0 + S_e} \frac{dS_0}{dq} \hat{v}_{1r} \cos(\alpha - \zeta). \end{aligned} \quad (38)$$

Wird nun noch  $\hat{v}_{1r}$  durch die rechte Seite der Gl. (35 a) ersetzt, so resultiert schließlich folgende Differentialgleichung für  $\hat{v}_{1\zeta}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= D_B \hat{v}_{1\zeta} + \frac{1}{S_0 + S_e} \frac{dS_0}{dq} \left( \frac{d\hat{v}_{1\zeta}}{dq} + \hat{\omega}_{1\alpha} \right) \\ &\quad + (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{B}})_{1\zeta} + \hat{q}_1. \end{aligned} \quad (39)$$

Das Ergebnis für  $\hat{v}_{1\zeta}$  innerhalb und außerhalb des leitfähigen Bereiches läßt sich nicht mehr in geschlossener Form darstellen. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung erfolgt in beiden Bereichen durch Reihenentwicklungen mit den Integrationskonstanten  $A_7$ ,  $A_8$  und  $A_9$ . Die inhomogenen Teile werden im Leiterinneren ebenfalls durch Reihenansätze befriedigt, außerhalb des leitfähigen Kanals läßt sich die Methode der Variation der Konstanten anwenden.

Die 9 Integrationskonstanten des Problems hat man schließlich aus folgenden Randbedingungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} [p_1] &= 0, \quad [d\hat{v}_{1\alpha}/dq] = 0, \\ [\mathbf{v}_1] &= 0, \quad [\hat{d}v_{1\zeta}/dq] = 0, \quad \mathbf{v}_1^a(k) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Die normierte Geschwindigkeit ist vor allem eine Funktion der Geometriegrößen, sie hängt jedoch, wenn auch sehr schwach, über die auf  $L$  normierte Konstante  $S_e$  von der Bogenleistung ab.

Die Strömungsgeschwindigkeit besitzt für den vorliegenden Fall, wie Fig. 4 a zeigt, im Bogenkanal, dem Ort der Antriebskräfte, ein steiles Maximum und nimmt in Richtung Gefäßwand mit zunehmender Dichte sehr stark ab. Im Bogeninneren setzen sich die hier völlig dominierenden  $r$ - und  $\alpha$ -Komponenten zu einer Strömung quer zum Bogen in Richtung der Auslenkung zusammen, nahe der

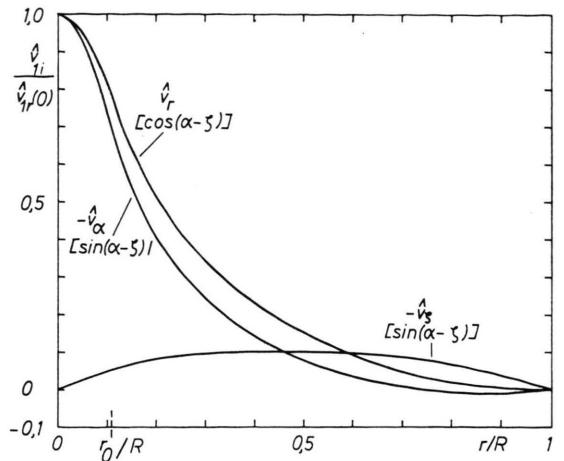


Abb. 4 a.

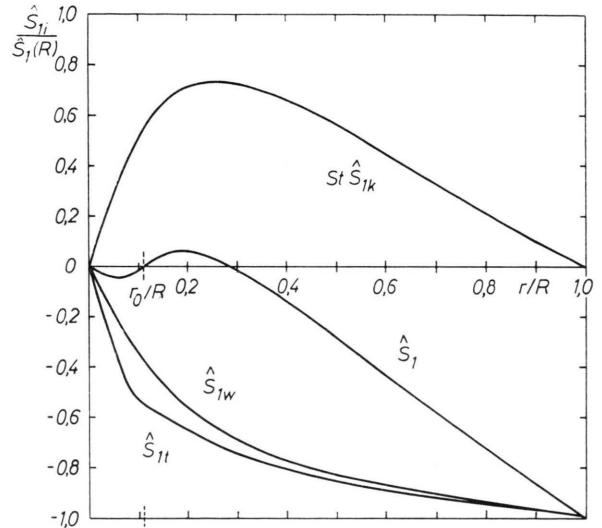


Abb. 4 b.

Abb. 4. Amplituden der Störgrößen in einem Entladungsrohr mit 18 mm  $\phi$ , in dem ein gewendelter Bogen brennt ( $r_0 = 1$  mm,  $\lambda/(2\pi) = k^{-1} = 5$  mm,  $b = 2\pi S_0/L = 0.15$ ). a) Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  mit Angabe der Winkelabhängigkeit, normiert auf

$$\hat{v}_{1r}(0) = \mu_0 j_0^2 \eta^{-1} k^{-3} \cdot 6,46 \cdot 10^{-4}.$$

b) Wärmestrompotential  $\hat{S}_1$  mit  $S t = 2,68$ , normiert auf  $\hat{S}_1(R) = L \cdot 8,84 \cdot 10^{-2}$ , ergänzt durch den Beitrag der Konvektion  $\text{St } \hat{S}_{1k}$  zu  $S_1$ , der Wärmeleitung und inhomogenen Aufheizung  $S_{1t}$  und der Wärmeleitung  $\hat{S}_{1w}$  allein.

Gefäßwand überwiegt dagegen die  $\zeta$ -Komponente und führt zu einer Strömung in Achsenrichtung. Es läßt sich zeigen, daß sich das Gas auf unendlich langen Stromlinien, die periodisch die Entladung kreuzen, in beiden Richtungen den Bogen entlang bewegt.

#### 4.5. Integration der Energiegleichung

Mit den in 4.2 eingeführten normierten Größen erhält man für die Energiebilanz:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial(1/\varrho_M)}\right)_p \frac{\mu_0 G}{\eta \pi^2 \varrho_0^4} \operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta S + \frac{\mathbf{j}^2}{\pi \varrho_0^2}. \quad (41)$$

Die dimensionslose Zahl vor dem Konvektionsterm

$$St = \left(\frac{\partial h}{\partial(1/\varrho_M)}\right)_p \frac{\mu_0 G}{\eta \pi^2} = \frac{c_p \mu_0 G}{\pi (\partial(1/\varrho_M)/\partial S)_p \eta \pi^2} \quad (42)$$

hängt ausschließlich von den Gaseigenschaften und dem Leitwert  $G$  des ungestörten Bogens ab. In alle übrigen Terme gehen nur Geometriegrößen ein. Zur Bestimmung der Störung  $\hat{S}_1 \cos(\alpha - \zeta)$  substituiert man zunächst  $\operatorname{div} \mathbf{v}_1$  mit Hilfe von Gl. (37). Führt man in der Energiegleichung die Entwicklung nach Grund- und Störgrößen durch, so findet man für  $S_1$  schließlich folgende Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{S}_1^i(\varrho) &= B_1 I_1(\varrho) - \frac{\varrho}{2 \pi \varrho_0^2} + \frac{I_1'(\varrho)}{\pi \varrho_0^2 I_1'} \\ &+ \frac{St}{\varrho_0^4} \left[ \varrho I_1'(\varrho) \left( \frac{A_1}{2} + \frac{1}{4 I_1'} \right) - \frac{\varrho^2}{8} \frac{I_1(\varrho)}{I_1'} + \hat{v}_{1z} \right], \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_1^a(\varrho) &= B_2 I_1(\varrho) + B_3 K_1(\varrho) - \frac{1}{2 \pi \varrho} \\ &+ \frac{St}{\varrho_0^4} [A_2 \frac{1}{2} \varrho I_1'(\varrho) + A_3 \frac{1}{2} \varrho K_1'(\varrho) + \hat{v}_{1z}] \end{aligned} \quad (44)$$

Die 3 Integrationskonstanten  $B_v$  ergeben sich aus

$$[\hat{S}_1] = 0, \quad [\operatorname{d}\hat{S}_1/d\varrho] = 0 \quad (45)$$

und daraus, daß  $S$  auf der Wand Null sein muß. Allerdings liegt für die speziellen Koordinaten die Gefäßwand nicht bei  $r = 1$  sondern bei

$$r = 1 - \delta k^{-1} \cos(\alpha - \zeta),$$

weshalb die Grundlösung auf der Wand nicht verschwindet und nach ihrer Entwicklung um die Stelle 1 zusammen mit  $S_1$  folgende Randbedingung ergibt:

$$\hat{S}_1^a(k) + (2 \pi k)^{-1} = 0. \quad (46)$$

Die Lösung für  $\hat{S}_1$  zerfällt in zwei Anteile, in einen positiven Beitrag  $St \hat{S}_{1k}$ , der vom Konvektionsterm herrührt, und einen negativen Ausdruck  $\hat{S}_{1t}$ , welcher der dissipativen Stabilisierung durch Wärmeleitung und inhomogene Aufheizung entspricht. In Fig. 4 b ist der radiale Verlauf von  $\hat{S}_1$  zusammen mit den

beiden Anteilen  $St \hat{S}_{1k}$  und  $\hat{S}_{1t}$  dargestellt, wobei  $St$  so gewählt wurde, daß  $\hat{S}_1(\varrho_0) = 0$  ist. Als Ergänzung ist außerdem der Beitrag  $\hat{S}_{1w}$ , der sich durch Wärmeleitung allein ergibt, aufgetragen.

#### 5. Ergebnisse der Untersuchung

##### 5.1. Konsistenz der Lösung und Stabilitätsbedingung

Anhand der Ergebnisse läßt sich die in 3.1 angegebene Bedingung einer stationären helikalen Lösung quantitativ formulieren, wobei an die Stelle des Stromes die dimensionslose Größe  $St$  tritt.

Im Kanalmodell wird die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit vom Wärmestrompotential  $\sigma(S)$  durch eine Rechteckfunktion angenähert, die in einem Einsatzpunkt  $S_E$  von Null auf einen konstanten Wert der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma_0$  springt. Unter dieser Bedingung ist die Lösung nur dann in sich konsistent, wenn das Wärmestrompotential  $S_0 + \delta S_1$  überall im Innern des Leiters größer als  $S_E$  ist, auf der Leiteroberfläche den Wert  $S_E$  annimmt und außerhalb des Leiters die Größe  $S_E$  an keiner Stelle erreicht. Nur dann ist die Voraussetzung konstanter elektrischer Leitfähigkeit für  $r < r_0$  und verschwindender Leitfähigkeit außerhalb des Bogenkanals erfüllt. In der Rechnung wurde die Grundlösung  $S_0$  bereits so gewählt, daß sie die Konsistenzbedingung befriedigt. Diese reduziert sich dadurch auf  $\delta S_1(\varrho_0) = 0$ , da daraus wegen

$$|S_0(\varrho) - S_E| > \delta |S_1(\varrho)| \text{ für } \varrho \neq \varrho_0$$

die Konsistenz der Lösung im ganzen Bogengefäß folgt. Da für den gestörten Bogen  $\delta \neq 0$  ist, erhält man schließlich nach der Aufspaltung von  $S_1$  in den konvektiven und den thermischen Anteil als Konsistenzbedingung:

$$S_{1t}(r_0/R, 2 \pi R/\lambda) + St S_{1k}(r_0/R, 2 \pi R/\lambda) = 0. \quad (47)$$

Abhängig von  $\lambda/(2 \pi R) = k^{-1}$  lassen sich daraus die speziellen  $St$ -Werte berechnen, die eine stationäre Lösung ergeben. Für größere  $St$ -Werte übertrifft bei vorgegebener Geometrie ( $\lambda, r_0, R$ ) der destabilisierende Konvektionsterm  $St \varrho_0^{-4}(\operatorname{div} \mathbf{v})$  in der Energiebilanz die übrigen stabilisierenden Glieder, so daß sich die Helix aufweitet, während unterhalb des Grenzwertes der Konvektionsterm für eine gewendelte Konfiguration zu klein ist. Die Kurven,

die man aus Gl. (47) in einer  $\lambda/(2\pi R) \cdot St$ -Ebene mit  $r_0/R$  als Parameter bekommt, zerlegen daher die Ebene in einen Bereich mit positiver Anwachsraten der Instabilität ( $\hat{S}_1(\varrho_0) > 0$ ) und einen zweiten, in dem als stationäre Konfiguration nur ein gerader Bogen möglich ist ( $\hat{S}_1(\varrho_0) < 0$ ).

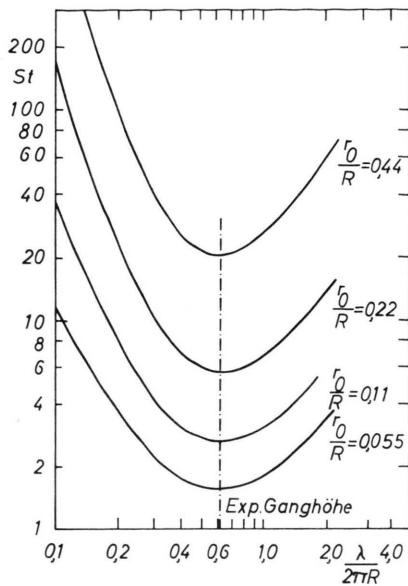


Abb. 5. Kurven verschwindender Anwachsraten der Instabilität in der  $St\lambda/(2\pi R)$ -Ebene mit  $r_0/R$  als Parameter. Die eingetragene experimentelle Ganghöhe fällt vollständig mit  $\lambda_{\min}$  zusammen.

In Abb. 5 ist eine Schar nach Gl. (47) berechneter Grenzkurven mit  $r_0/R$  als Parameter dargestellt. Die Kurven besitzen für eine bestimmte Ganghöhe ein ausgeprägtes Minimum mit der Ordinate  $St_{\min}$  und der rel. Ganghöhe  $(\lambda/2\pi R)_{\min}$  und steigen zu beiden Seiten des Minimums monoton an. Mit zunehmenden Kanalradien wandern die Kurven zu größeren  $St$ -Werten, wobei jedoch der Abszissenwert des Minimums in dem normierten Diagramm unverändert bleibt.

Ist die in einem Bogen mit dem Leitwert  $G$  und dem Radius  $r_0/R$  realisierte Größe  $St$  kleiner als  $St_{\min}$ , so ist die Entladung nach dem oben Gesagten in der zylindersymmetrischen Form stabil, für  $St = St_{\min}$  befindet sich der zylindrische Bogen an der Stabilitätsgrenze, und für  $St > St_{\min}$  ist der gerade Bogen instabil und geht in die gewendelte Form über.

## 5.2. Vergleich der Resultate für den $H_2$ -Niederstrom-Bogen mit dem Experiment

Der Abszissenwert des Minimums der Stabilitätsgrenzkurven in Abb. 5 markiert die theoretisch zu erwartende Ganghöhe der Instabilität im Wendeleinsatzpunkt. Mit  $\lambda_{\min} = 35,2$  mm bei einem Gefäßdurchmesser von 18,3 mm stimmt diese vollständig mit dem experimentellen Wert von 35,5 mm überein.

Die Einsatzstromstärke der Instabilität findet man, indem man sowohl die Größe  $St$  als auch  $St_{\min}$  z. B. in Abhängigkeit von der Stromstärke ermittelt und die beiden Kurven zum Schnitt bringt. Bei der Bestimmung von  $St$  werden die in 3.3 diskutierten Werte für den Leitwert  $G$ , die Viskosität  $\eta$  und die Größe  $(\partial h/\partial(1/\varrho_M))_p$  eingesetzt, wobei die aus der Vernachlässigung der radialen Abhängigkeiten folgenden Fehler in  $St$  20% nicht überschreiten. Die Größe  $St_{\min}$  hängt über den Radius des leitfähigen Kanals von der Stromstärke ab. Um zu zeigen, daß die Wahl des Kanalradius das theoretische Ergebnis nicht grundsätzlich beeinflußt, wird  $St_{\min}$  für drei verschiedene definierte Kanalradien berechnet: einmal für den mittleren Kanalradius, den man in Abschnitt 3.3 aus der systematischen Approximation der Leitfähigkeitsverteilung erhielt, außerdem aber auch für die dort angegebene obere und untere Grenze von  $r_0$ .

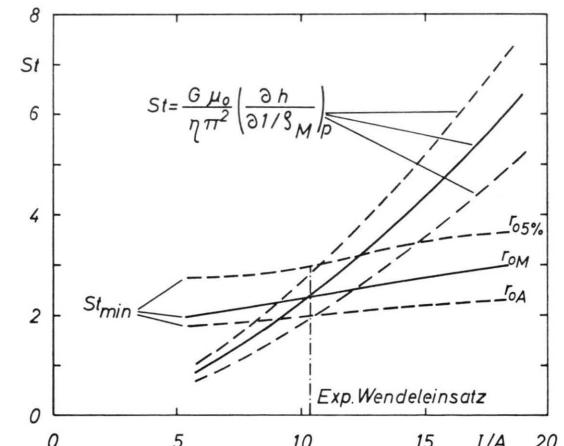


Abb. 6.  $St(I)$ - und  $St_{\min}(I)$ -Verlauf mit gestrichelter Fehlerschranke. Der Schnitt der beiden Kurven ergibt den theoretischen Wendeleinsatzpunkt in guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

In Abb. 6 ist der Verlauf von  $St_{\min}$  für die drei verschiedenen Kanalradien aufgetragen, außerdem die Kurven für  $St(I)$  mit einer Fehlerschranke von

$\pm 20\%$ . Aus dem Schnitt der beiden Kurvenscharen erhält man einen Wendeleinsatzpunkt zwischen 8 und 14,5 A. Betrachtet man die beiden voll ausgezogenen Kurven aus den optimalen Näherungen, so findet man den theoretischen Wendeleinsatz bei 10,2 A, während sich für den experimentellen Wert 10,35 A ergibt.

Schließlich soll die oberhalb des Wendeleinsatzpunktes in Abhängigkeit vom Strom gemessene Ganghöhe der Instabilität mit der Theorie verglichen werden. Trägt man dazu das gemessene  $\lambda(I)$  zusammen mit  $S t(I)$  in das  $\lambda/(2\pi R)$ - $S t$ -Diagramm der Abb. 7 ein, so folgen die Meßpunkte bis auf den letzten, wie man der Abbildung entnimmt, sehr genau der Stabilitätsgrenzkurve in Richtung abnehmender Ganghöhe. Dies läßt den Schluß zu, daß auch oberhalb der Stabilitätsgrenze die lineare Theorie für einen gewendelten Bogen mit endlicher, wenn auch kleiner Amplitude näherungsweise richtig ist. Die Abnahme der Ganghöhe ist auf die in der Theorie nicht enthaltene Kontraktion der Wendel wegen ihrer endlichen Länge zurückzuführen.

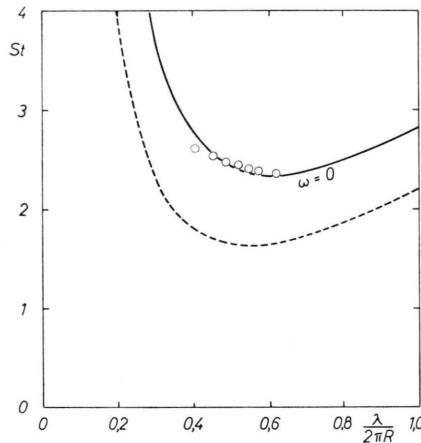


Abb. 7. Experimentelle Ganghöhe oberhalb des Wendeleinsatzpunktes in der  $\lambda/(2\pi R)$ - $S t$ -Ebene zusammen mit der Stabilitätsgrenzkurve für 10 A. Die gestrichelte Stabilitätsgrenzkurve erhält man bei Vernachlässigung der inhomogenen Aufheizung.

### 5.3. Allgemeine Aussagen

Die Ganghöhe, bei der das Minimum der Stabilitätsgrenzkurve in Abb. 5 auftritt, hat die Größe  $\lambda_{\min} = 3,84 R \approx 4 R$ , und zwar für beliebige Kurvenparameter  $r_0/R$ . Die Theorie ergibt also, daß unabhängig von Gasart, Druck und Bogenleistung die Ganghöhe der Instabilität im Einsatzpunkt rund doppelt so groß wie der Gefäßdurchmesser ist.

In Abb. 7 ist neben der voll ausgezogenen Stabilitätsgrenzkurve ein gestrichelter Verlauf eingetragen, den man bei Vernachlässigung der inhomogenen Aufheizung im gekrümmten Bogen erhält. Aus dem Abstand der beiden Kurven ersieht man, daß die Inhomogenität des elektrischen Feldes verglichen mit der der Wärmeleitung zwar den kleineren, aber keineswegs vernachlässigbaren Beitrag zur Stabilisierung leistet.

In dem Ausdruck für  $S t$  ist hauptsächlich die Größe  $(\partial h / \partial (1/\varrho_M))_p$ , die stetig mit dem Druck zunimmt, von diesem abhängig. Die Tendenz zur Instabilität sollte sich daher mit steigendem Füllgasdruck verstärken.

Das Anwachsen der Destabilisierung mit dem Bogenleitwert  $G$ , d. h. im fallenden Teil der Bogencharakteristik mit dem Strom, folgt ebenfalls unmittelbar aus  $S t$ .

Je höher bei einem Bogengas der Einsatzpunkt  $S_E$  der elektrischen Leitfähigkeit liegt, um so kleiner wird nach Gl. (29) der normierte Kanalradius und damit  $S t_{\min}$ . Hohe  $S_E$ -Werte und damit eine geringe Bogenstabilität erhält man insbesondere bei Molekülgasen, die erst wie z. B. Wasserstoff nach Abschluß der Dissoziation elektrisch leitend werden, da dann der Dissoziationsberg der Wärmeleitfähigkeit das Wärmestrompotential bis zum Einsatzpunkt besonders stark anwachsen läßt.

Für einen Bogen im thermischen Gleichgewicht sind bei vernachlässigbarer Strahlung die über dem normierten Radius  $r/R$  aufgetragenen  $\sigma$ - und  $S$ -Verteilungen nur von der Leistung abhängig. Daher sind auch die folgenden Größen ausschließlich eine Funktion der Leistung: der auf  $R^2$  normierte Leitwert  $G^*(L) = G/R^2$ , die gemittelten Materialeigenschaften in der Größe  $S t$ , der normierte Kanalradius  $r_0/R$  und als Folge  $S t_{\min}$ . Bei festgehaltener Bogenleistung kann man daher immer durch einen kleineren Gefäßradius und einen dadurch erniedrigten Leitwert  $G$  ein Verhältnis von  $S t/S t_{\min} < 1$  erreichen und damit jeden wandstabilisierten Bogen auch wirklich stabilisieren, wovon STEINBERGER<sup>6</sup> bereits Gebrauch gemacht hat.

Schließlich müßten sich für verschiedene Bogen-gase in einer weiteren Arbeit allgemeine Stabilitätsgrenzkurven berechnen lassen, indem man für jede Bogenleistung aus  $S t = S t_{\min}$  einen kritischen Gefäßradius:

$$R_{\text{krit}}^2 = \frac{S t_{\min}(L) \eta \pi^2}{(\partial h / \partial (1/\varrho_M))_p G^*(L) \mu_0} \quad (48)$$

bestimmt, für den sich der Bogen gerade an der Stabilitätsgrenze befindet. Dabei sollte sich zeigen, ob es abhängig von der Bogenleistung bzw. vom Strom auch eine obere Stabilitätsgrenze gibt.

Herrn Prof. Dr. H. MAECKER danke ich für die Anregung zu der Arbeit und seine wertvollen Ratschläge. Ebenfalls zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Dr. H. G.

STÄBLEIN für zahlreiche fruchtbare Diskussionen. Die numerischen Berechnungen wurde mit der elektronischen Rechenanlage des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München ausgeführt. Ich danke der zuständigen Kommission für die Überlassung der notwendigen Rechenzeit. Nicht zuletzt bin ich auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Sachbeihilfe zu dem durchgeföhrten Forschungsvorhaben zu großem Dank verpflichtet.

## Einfluß der Rotation auf die Lebensdauer prädissoziierender Moleküle

F. J. COMES und G. SCHUMPE

Institut für Physikalische Chemie der Universität Bonn

(Z. Naturforsch. **26 a**, 538—546 [1971]; eingegangen am 23. Dezember 1970)

The D  $^1\Pi_u - X^1\Sigma_g^+$  system of  $H_2$  and  $D_2$  shows strong predissociation. High resolution measurements on the line widths of isolated absorption lines have been carried out, showing the influence of rotation on the predissociation probability of the corresponding rotational states. Their lifetime decreases with increasing rotation of the molecule and with decreasing mass due to the coupling of electronic and rotational motion. Both results are in excellent agreement with theoretical predictions given by Kronig.

The shape of the absorption lines broadened by predissociation was found to be typically asymmetric. They are of the Beutler type, well known from the autoionisation of the rare gases.

### Einleitung

Die Photodissoziation von Molekülen durch strahlungslosen Zerfall angeregter Molekülzustände wird Prädissoziation genannt. Näherungsweise kann sie als das Ergebnis der Wechselwirkung diskreter Molekülzustände mit kontinuierlichen Zuständen beschrieben werden. Das dazugehörige Kontinuum ist das Dissoziationskontinuum des Moleküls. Die Konfigurationswechselwirkung führt zu Termverschiebungen und Linienverbreiterungen. Die Linienform prädissoziierender Molekülzustände sollte eine charakteristische Unsymmetrie aufweisen. Der molekulare Wasserstoff bietet gute Voraussetzungen für eine Beobachtung des geschilderten Phänomens, da sein Absorptionsspektrum an geeigneten Stellen vollständig aufgelöst werden kann. Es ist somit möglich, den Einfluß der Rotation auf die Prädissoziation von Molekülen zu untersuchen.

Die Verbesserung der Meßtechnik im Bereich des Vakuum-Ultravioletts hat in jüngster Zeit zu besonders eindrucksvollen Ergebnissen über das Dissozia-

tions- und Ionisationsverhalten des Wasserstoffmoleküls geführt<sup>1</sup>. Bei der Beobachtung der Prädissoziation wurde ein neues physikalisches Phänomen entdeckt, die Prädissoziation im elektrischen Feld<sup>2</sup>. Höhere Rydberg-Zustände ( $n \geq 9$ ) des Wasserstoffmoleküls der Konfiguration  $(1s\sigma, np\sigma)^1\Sigma_u^+$  zerfallen in schwachen elektrischen Feldern durch Prädissoziation, indem sie mit dissoziativen Zuständen koppeln, die im feldfreien Zustand für sie nicht erreichbar sind.

Bei der Photodissoziation des Wasserstoffmoleküls entstehen angeregte H-Atome. Bis zu einer Wellenlänge von  $\lambda \sim 748 \text{ \AA}$  kann aus energetischen Gründen das elektronisch angeregte H-Atom nur im Zustand mit der Hauptquantenzahl  $n = 2$  erzeugt werden<sup>3</sup>. Unter geeigneten Bedingungen sendet dieses Atom seine innere Energie als Ly <sub>$\alpha$</sub> -Strahlung ab, so daß für jedes dissoziierende Molekül ein Ly <sub>$\alpha$</sub> -Quant meßbar wird. Die Beobachtung dieser Atomfluoreszenz in Abhängigkeit von der primären Anregung ermöglichte die Bestimmung des Dissoziationsquerschnitts des Moleküls<sup>4</sup>. Da das angeregte Atom ent-

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. F. J. COMES, Institut für Physikalische Chemie der Universität Bonn, D-5300 Bonn, Wegelerstr. 12.

<sup>1</sup> a) G. HERZBERG, Phys. Rev. Letters **23**, 1081 [1969]. — b) W. A. CHUPKA u. J. BERKOWITZ, J. Chem. Phys. **51**, 4244 [1969]. — c) F. J. COMES u. U. WENNING, Z. Natur-

forsch. **25 a**, 237 [1970]. — d) S. TAKEZAWA, J. Chem. Phys. **52**, 2575 [1970].

<sup>2</sup> F. J. COMES u. U. WENNING, Chem. Phys. Letters **5**, 195 [1970]; Z. Naturforsch. **25 a**, 406 [1970].

<sup>3</sup> T. NAMIOKA, J. Chem. Phys. **41**, 2141 [1964].

<sup>4</sup> F. J. COMES u. H. O. WELLERN, Z. Naturforsch. **23 a**, 881 [1968].